SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA

ISTITUTO MATEMATICO DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

M. MIRANDA

SOLUZIONI SINGOLARI DEL PROBLEMA DI PLATEAU

20 e 27 GENNAIO 1983

SOLUZIONI SINGOLARI DEL PROBLEMA DI PLATEAU

Intendo parlare di superficie n dimensionali contenute in spazi euclidei $n+1$ dimensionali, che abbiano misura minima e siano singolari.

Per misura minima deve intendersi che porzioni interne di superficie non possano essere sostituite con riduzione della misura.

Il primo esempio di superficie minima singolare, riconosciuto come tale, è il cosidetto cono di Simons

$$S = \{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2\}$$

dello spazio euclideo ad otto dimensioni.

In verità Simons si limitò ad indicare detto cono come candidata superficie minima singolare. Il riconoscimento del fatto è dovuto a Bombieri, De Giorgi e Giusti.

E' facile riconoscere che la curvatura media di S è nulla in ogni suo punto regolare, cioè al di fuori del suo vertice. Se infatti si considera un punto di S regolare, supposto che in esso sia

$$x_8 > 0 ,$$

vicino ad esso S è il grafico della funzione f di sette variabili

$$f(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_5^2 - x_6^2 - x_7^2}$$

avremo quindi che la curvatura media è nulla se e solo se f verifica l'equazione delle superficie minime, cioè

$$\sum_{i=1}^{7} D_i\left(\frac{D_i f}{\sqrt{1+|Df|^2}}\right) = 0 \ , \quad D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Tale verifica è immediata:

$$D_i f = \frac{x_i}{f} \quad \text{per} \quad i \leq 4 \ , \quad D_i f = \frac{-x_i}{f} \quad \text{per} \quad i \geq 5$$

$$1 + |Df|^2 = \left(2 \sum_{i=1}^{4} x_i^2\right) / f^2$$

quindi

$$\frac{D_i f}{\sqrt{1+ Df^2}} = \frac{x_i}{\sqrt{2 \sum_{i=1}^{4} x_i^2}} \ , \ \text{per} \quad i \leq 4 \ ; \quad \frac{D_i f}{\sqrt{1+|Df|^2}} = \frac{-x_i}{\sqrt{2 \sum_{j=1}^{4} x_j^2}} \ , \quad i \geq 5 \ .$$

Perciò:

$$\sum_{i=1}^{7} D_i\left(\frac{D_i f}{\sqrt{1+|Df|^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2 \sum_{i=1}^{4} x_i^2}} - \frac{2 \sum_{i=1}^{4} x_i^2}{\left[\sqrt{2 \sum_{i=1}^{4} x_i^2}\right]^3} = 0 \ .$$

Questa verifica, non foss'altro che per la presenza del punto singolare, non è sufficiente per affermare che la superficie S è minima. Basti pensare al caso di due piani dello spazio ordinario, che non costituiscono superficie minima nè nel caso che si intersechino, nè nel caso che siano paralleli (assenza di punti singolari).

Nel primo di questi due seminari darò l'indicazione delle tappe della verifica di Bombieri-De Giorgi-Giusti, rinviando al loro articolo per le spiegazioni. Nel secondo seminario indicherò una nuova dimostrazione di Massari e mia, che ritengo possa essere spiegata in ogni dettaglio nell'arco di un'ora.

1. FUNZIONI DI MINIMO GRADIENTE E SUPERFICIE MINIME

Il problema della verifica della minimalità di S può ricondursi alla ricerca di una funzione f definita su R^8 con gradiente minimo e tale che

$$\{x \in R^8 | f(x) > 0\} = \{x \in R^8 | x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 > x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2\} .$$

Gradiente minimo, nel caso in fui f abbia gradiente integrabile, vuol dire

$$(1) \qquad \int_A |Df(x)|dx \leq \int_A |Dg(x)|dx$$

per ogni A aperto limitato ed ogni g diversa da f in una regione compatta di A.

Nel caso in cui f abbia gradiente regolare e diverso da zero, la condizione di minimo gradiente può esprimersi in modo puntuale con l'equazione

$$(2) \qquad \operatorname{div}\left(\frac{Df(x)}{|Df(x)|}\right) = 0$$

Utili, ai fini della ricerca di f, sono i seguenti due lemmi che permettono ad f una certa libertà di essere singolare.

<u>Lemma</u> 1. Se $f \in H^{1,1}_{loc}(R^8)$ e

$$\tilde{H}_8\{x \in R^8 \,\big|\, |Df(x)| = 0\} = 0 \quad ,$$

se N è un chiuso con

$$H_7(N) = 0$$

e vale

$$(3) \qquad \int |Df(x)|^{-1} Df(x) \cdot D\phi(x)\,dx = 0$$

per ogni $\phi \in C^1_0(R^8 - N)$, allora f ha gradiente minimo in R^8.

<u>Lemma</u> 2. Se K è un chiuso di R^8 localmente di misura 7 dimensionale finita, se $f \in C^2(R^8 - K)$ con $Df(x) \neq 0 \;\; \forall\, x \in R^8 - K$ e se $\dfrac{Df(x)}{|Df(x)|}$ può estendersi con continuità a tutto R^8 e (2) è verificata in $R^8 - K$ allora (3) vale per ogni $\phi \in C^1_0(R^8)$, cioè f ha gradiente minimo in R^8.

Per risolvere il nostro particolare problema cerchiamo una f di tipo speciale:

$$f(x) = F(u, v) \ , \text{ con } \ u = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2} \ , \quad v = \sqrt{x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2}$$

La (2) si scrive per F nel modo seguente

$$(4) \qquad F_v^2 F_{uu} - 2F_u F_v F_{uv} + F_u^2 F_{vv} + 3\left(\frac{F_u}{u} + \frac{F_v}{v}\right)\left(F_u^2 + F_v^2\right) = 0 \quad .$$

La ricerca di F risolvente (4) verrà impostata attraverso la ricerca preliminare delle sue linee di livello. A questo proposito osserviamo che la condizione di minimo gradiente è una condizione sulle linee di livello.

Se $u = u(t)$, $v = v(t)$ è una di tali linee, eliminando F da (4) con l'ausilio della equazione

$$\frac{d}{dt} F(u(t), v(t)) = 0$$

si ha, assumendo per i calcoli $u'(t) \neq 0$;

$$(5) \qquad u''v' - u'v'' + 3(u'^2 + v'^2)\left(\frac{u'}{v} - \frac{v'}{u}\right) = 0 \quad .$$

L'equazione (5) viene trasformata, attraverso l'introduzione delle coordinate angolari

$$\phi = \operatorname{arctg}\frac{v}{u} \ , \quad \theta = \operatorname{arctg}\frac{v'}{u'} \quad ,$$

$$(6) \qquad 6\cos(\theta + \phi)d\phi + \sin 2\phi \ \sin(\theta - \phi)d\theta = 0 \quad .$$

Ponendo

$$\sigma = \theta - 3\phi + \pi/2 \ , \quad \psi = \theta + \phi - \frac{\pi}{2}$$

si ottiene, attraverso un'opportuna scelta del parametro $t \in (-\infty, +\infty)$, il sistema differenziale

$$(7) \qquad \frac{d\sigma}{dt} = -\frac{3}{2}\sin\sigma - \frac{15}{2}\sin\psi \ , \quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{2}\sin\sigma - \frac{11}{2}\sin\psi \ .$$

Il sistema (7) viene studiato con i metodi di Bendixon e Poincaré. Si ottiene allora il seguente

Lemma 3. Esiste una soluzione $\gamma_0(t) = (\sigma_0(t), \psi_0(t))$ di (7) con le seguenti proprietà

$$\gamma_0(-\infty) = (\pi, 0) \ , \quad \gamma_0(+\infty) = (0, 0) \ , \quad 0 < \psi_0(t) < \sigma_0(t) < \pi$$

e, le rette $\psi - \sigma = c$, $0 < c < \pi$, incontrano $\gamma_0(t)$ in un punto.

Alla curva γ_0 corrisponde una curva Γ sul piano (u, v) . Le omotetiche di Γ , $\Gamma_\lambda = (\lambda u, \lambda v)$ per $\lambda > 0$ riempiono l'angolo

$$\{(u, v) \mid 0 \leq v < u\}$$

Cercheremo ora F , omogenea di grado 2α , avente le Γ_λ come linee di livello. Il numero α verrà opportunamente determinato perchè $\frac{DF}{|DF|}$

sia prolungabile con continuità attraverso la retta $u = v$, sulla quale F sarà nulla.

Cercheremo F della forma

$$F(u, v) = (u^2 + v^2)^{\alpha} G\left(\operatorname{arctg}\frac{v}{u}\right)$$

con G determinata da

$$F(u_0, v_0) = 1 \quad , \text{ cioè}$$

$$G(t) = \left(u_0^2(t) + v_0^2(t)\right)^{-\alpha} \quad , \quad 0 \leq t < \frac{\pi}{4} \quad .$$

Da ciò segue

$$\lim_{t \to \frac{\pi}{4}-} G(t) = 0$$

Calcoli elementari danno, perchè la continuità di $\frac{DF}{|DF|}$ sia possibile attraverso $u = v$, la seguente scelta di α

$$\alpha = \frac{3}{2} \quad .$$

2. NUOVA DIMOSTRAZIONE

Indichiamo con B la sfera

$$B = \{(x, y) \in R^4 \times R^4 \,\big|\, |x|^2 + |y|^2 < 1\}$$

e consideriamo la funzione

$$\phi(x, y) = (|x|^2 - |y|^2)(|x|^2 + |y|^2) \quad \text{per} \quad (x, y) \in R^4 \times R^4 \quad .$$

Vale, come si verifica con semplice calcolo, la seguente

$$\phi(x, y)\,\mathrm{div}\left(\frac{D\phi(x, y)}{\sqrt{1 + |D\phi(x, y)|^2}}\right) \geq 0 \ , \ \forall \ (x, y) \quad ,$$

in altre parole ϕ è subsoluzione dell'equazione delle superficie minime laddove essa è positiva e sottosoluzione della stessa equazione laddove essa è negativa. Questo stesso fatto vale, per ogni $h > 0$, per le funzioni

$$\phi_h(x, y) = h^{-1}\phi(hx, hy) = h^3\phi(x, y) \quad .$$

Indichiamo ora con ψ_h la successione delle soluzioni dell'equazione delle superficie minime nella sfera B che siano eguali a ϕ_h su ∂B. Ragioni di simmetria e il principio del massimo implicano le seguenti diseguaglianze

$$\psi_h \geq \phi_h \quad \text{dove} \quad \phi_h > 0 \ ,$$

$$\psi_h \leq \phi_h \quad \text{dove} \quad \phi_h < 0 \quad .$$

Poichè $\phi_h \to +\infty$ dove $\phi > 0$ e $\phi_h \to -\infty$ dove $\phi < 0$ avremo che

$$\psi_h(x, y) \to +\infty \quad \text{se} \quad (x, y) \in B \quad \text{e} \quad |x| > |y|$$

$$\psi_h(x, y) \to -\infty \quad \text{se} \quad (x, y) \in B \quad \text{e} \quad |x| < |y| \quad .$$

Potremo quindi dire che il graphψ_h , che è superficie minima, tende al cilindro

$$\{(x, y) \in B \,\big|\, |x| = |y|\} \times R \quad ,$$

che risulterà pertanto esso stesso superficie minima. Ciò d'altra parte equivale a dire che il cono $\{(x, y) \in B \,\big|\, |x| = |y|\}$ è superficie minima.

BIBLIOGRAFIA

[1] E. BOMBIERI - E. DE GIORGI - E. GIUSTI: "Minimal Cones and the Bernstein Problem", Inv. Math. 7 (1969), 243-268.

[2] U. MASSARI - M. MIRANDA: "A Remark on Minimal Cones", B.U.M.I. (in corso di stampa).